SF1624 Algebra och geometri

Sextonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

24 november, 2009

Baser

Sats

Om $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$ är $k \leq n$.

Bevis.

Det kan inte finnas en ledande etta i varje kolonn om $k > n$ eftersom det finns högst en ledande etta i varje rad. $\square$

Definition (Bas)

En **bas** för $\mathbb{R}^n$ är en linjärt oberoende mängd med n vektorer.

Koordinater

Sats

Om $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ kan varje *vektor i $\mathbb{R}^n$ skrivas på ett* unikt *sätt som*

$$a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_n\overline{u}_n,$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Bevis.

Det finns en unik lösning till

$$a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_n\overline{u}_n = \overline{v},$$

för varje högerled, $\overline{v}$, eftersom den reducerade trappstegsformen för koefficientmatrisen är I. □

Definition (koordinater)

Koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kallas *koordinaterna* för $\overline{v}$ relativt basen $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$.

Ortonormala baser (ON-baser)

Sats

Om $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ är nollskilda och parvis ortogonala så är de linjärt oberoende.

Bevis.

Om $a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots a_k\overline{u}_k = 0$ kan vi ta skalärprodukt med $\overline{u}_i$ och får

$$0 = a_1\overline{u}_1 \cdot \overline{u}_i + a_2\overline{u}_2 \cdot \overline{u}_i + \cdots a_k\overline{u}_k \cdot \overline{u}_i = a_i|u_i|^2$$

$\square$

Definition

Vektorerna $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ utgör en *ortonormal bas* för $\mathbb{R}^n$ om de har längd 1 och är parvis ortogonala, dvs om

$$\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Koordinater i ON-baser

Det är lätt att hitta koordinaterna för en vektor relativt en ortonormal bas med hjälp av *ortogonal* projektion.

Sats

Koordinaterna för $\overline{u}$ *relativt en ortonormal bas* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *ges av*

$$(\overline{u} \cdot \overline{e}_1, \overline{u} \cdot \overline{e}_2, \ldots, \overline{u} \cdot \overline{e}_n).$$

Bevis.

Om $\overline{u} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + \cdots + a_n\overline{e}_n$ får vi att

$$\overline{u} \cdot \overline{e}_i = a_1\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_i + a_2\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_i + \cdots + a_n\overline{e}_n \cdot \overline{e}_i = a_i$$

eftersom $\overline{e}_j \cdot \overline{e}_i = 0$ för $j \neq i$ och $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_i = 1$. $\square$

Koordinater i allmänhet

Om basen inte är ortogonal får vi i allmänhet lösa ett linjärt ekvationssystem för att bestämma koordinaterna för en vektor.

Exempel

Vektorerna $\overline{u}_1 = (1, 0, -1)^t$, $\overline{u}_2 = (-1, 1, -3)^t$ och $\overline{u}_3 = (2, -1, 3)$ är linjärt oberoende och utgör därmed en bas för $\mathbb{R}^3$. För att bestämma koordinaterna för vektorn $\overline{v} = (a, b, c)^t$ relativt basen $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ behöver vi lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ -1 & -3 & 3 & c \end{array}\right) \sim [\text{G. J. E.}] \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -3b - c \\ 0 & 1 & 0 & a + 5b + c \\ 0 & 0 & 1 & a + 4b + c \end{array}\right)$$

Bas av egenvektorer